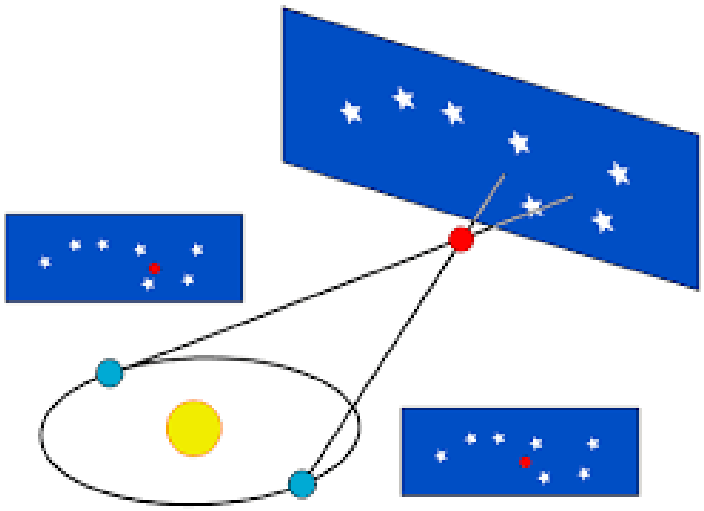
Lektionsmaterial om parallaxmetoden

Simon Ünsal Aydogan
Sama Raid Dawood
Kungliga Tekniska Högskolan
Stockholm, Sverige
VT 2026



Figur 1: Bild på en parallax som uppstår vid observationer av närliggande stjärnor. (bild tagen från Wikipedia)

Sammanfattning

Materialet är anpassat för elever som läser matematik nivå 2C eller matematik fortsättning nivå 1C. Lektionen är planerad att genomföras på cirka 60 minuter. Syftet med lektionen är att eleverna ska lära sig att beräkna avståndet till en stjärna med hjälp av parallaxmetoden.

Metoden bygger huvudsakligen på geometriska principer, vilket gör den relevant i matematikundervisningen. Materialet syftar även till att väcka intresse för matematik genom att visa hur matematiska metoder kan tillämpas i verkliga situationer.

Målgrupp

Elever som läser matematik nivå 2C och matematik fortsättning nivå 1C på gymnasiet.

Gruppstorlek

Ca 20–30 elever.

Tidsåtgång

Ca 60 minuter. Går att anpassa.

Syfte

Syftet med materialet är att väcka intresse för matematik genom att koppla matematik till rymden. Dessutom ska eleverna lära sig hur man kan beräkna avståndet till en närliggande stjärna via geometriska metoder (parallaxmetoden).

Lärandemål

Efter lektionen ska eleverna kunna följande (med utgångspunkt för kursplan i matematik nivå 2C/ matematik fortsättning nivå 1C):

- Förstå vad en parallax är.

- På ett enkelt sätt beräkna avståndet från jorden till en närliggande stjärna via parallaxmetoden.

Läroplanskoppling

Exempel på det centrala innehållet i matematik fortsättning nivå 1C:

- Bevis och användning av cosinus-, sinus- och areasatsen. Definition av trigonometriska begrepp.
- Tillämpning och formulering av matematiska modeller i realistiska situationer. Utvärdering av matematiska modellers egenskaper och begränsningar.

Förkunskaper

- Eleverna behöver kunna trigonometri (bland annat sin, cos och tan)
- Eleverna behöver allmän kunskap om enhetsomvandling

Viktiga begrepp

- Parallax
- Ljusår
- Parallaxvinkel
- AU
- Parsec

Bra information

https://sv.wikipedia.org/wiki/Parallax

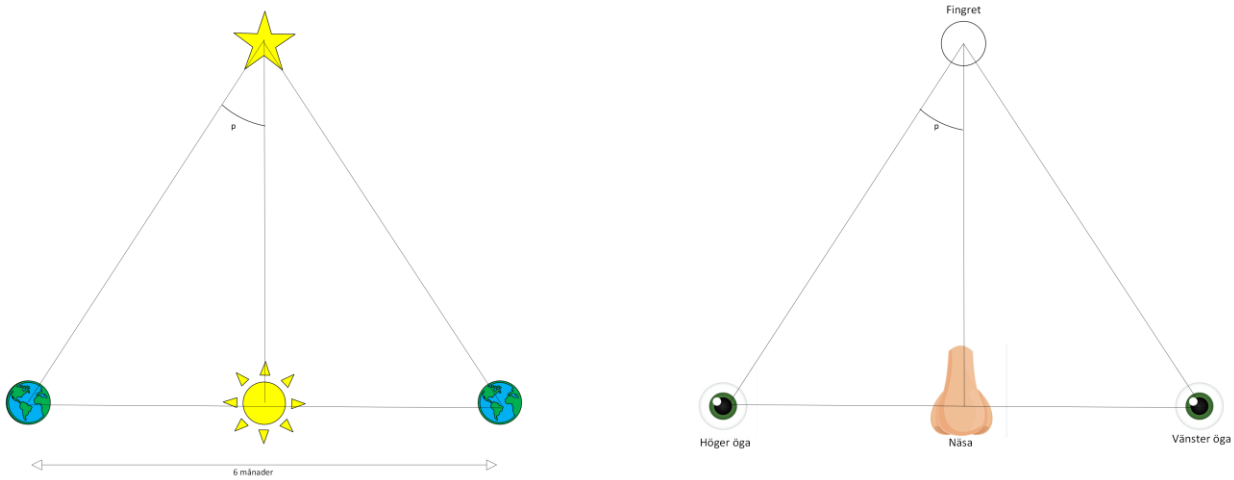
https://www-jstor-org.focus.lib.kth.se/stable/10.1086/683116?sid=primo&seq=1

Bakgrundsinformation om parallax

Parallax hos ett objekt är den observerade vinkelförskjutning som uppstår när objektet betraktas från två olika positioner. I astronomi studeras detta genom att observera en närliggande stjärna vid två tidpunkter med cirka sex månaders mellanrum.

Avståndet mellan jorden och solen används då som baslinje. Ett enkelt sätt att illustrera fenomenet är att hålla upp ett finger framför sig och växla mellan höger och vänster öga. Fingret tycks då förflytta sig i förhållande till bakgrunden, trots att det egentligen är observationsvinkeln som förändras.

På motsvarande sätt uppvisar en närliggande stjärna en skenbar förskjutning i förhållande till bakgrundsstjärnorna.

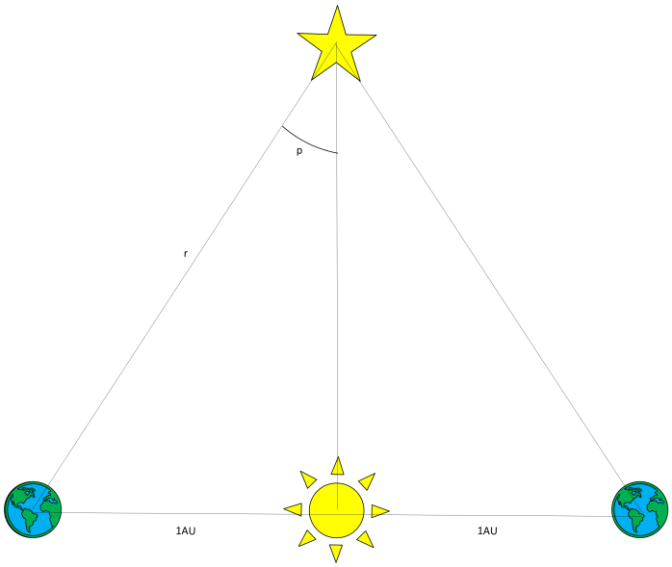


Figur 2: Samma princip i två situationer. När du växlar ögonen ser fingret ut att röra sig och när jorden byter position i sin bana ser en närliggande stjärna ut att förflytta sig mot bakgrunden. (Bilden är ritad av författarna).

Parallaxmetoden

Parallaxmetoden används för att bestämma avståndet till en stjärna genom att mäta dess parallaxvinkel. Observationer görs med cirka sex månaders mellanrum, vilket innebär att jorden befinner sig på motsatta sidor av sin bana.

Den uppmätta vinkeln är mycket liten, vilket gör att förskjutningen inte kan observeras med blotta ögat.



Figur 3: Bild på hur geometrin över en parallax kan se ut. (bilden är ritad av författarna)

Avståndet mellan jorden och solen är 1AU vilket motsvarar ljusår.

AU är en astronomisk enhet, det vill säga en längdenhet som används inom astronomi. Anledningen till att man använder AU istället för km är att avstånden i rymden är mycket stora, vilket gör km mindre praktiskt att använda.

Vinkel p, kallas för parallaxvinkel och mäts i bågsekunder. Bågsekunder används i astronomi eftersom vinklarna som mäts är extremt små.

Vid beräkning av avståndet r används trigonometri. Enligt Figur 3 gäller:

. där 1 motsvarar baslinjen (1 AU).

Eftersom vinkeln p är mycket liten kan approximationen sin(p)≈p användas. Detta ger .

Enhetsanalys:

- Formeln $r = \frac{1}{p}$
  - 1 är avståndet mellan solen och jorden som uttrycks i enheten AU.
  - p är parallaxvinkeln som uttrycks i enheten bågsekunder.
  - r är avståndet mellan jorden och stjärnan uttrycks i enheten parsec. En parsec definieras som det avstånd vid vilket 1 astronomisk enhet (1AU) motsvarar en vinkel på 1 bågsekund.

- Formeln $r = \frac{1}{\sin(p)}$
  - 1 är avståndet mellan solen och jorden som uttrycks i enheten AU.
  - p är parallaxvinkeln som uttrycks i enheten rad eller grad. (Eftersom sin(p) operatorn endast tar emot dessa två enheter).
  - r är avståndet mellan jorden och stjärnan utrycks i enheten AU.

Enhetsomvandling:

1 grad= 60 bågminuter = 3600 bågsekunder. [1°=60'=3600'']

$1'' = \frac{1}{3600^{\sigma}} = \frac{\pi}{180 \cdot 3600} rad = 4{,}85 \cdot 10^{-6} rad$

1 parsec$= 2{,}06 \cdot 10^{5}$AU$= 3{,}26$ ljusår.

Exempel:
En stjärna har parallaxen 0,008'' (0,008 bågsekunder). Beräkna avståndet till stjärnan i ljusår.

- Lösningsförslag 1 $\left[r = \frac{1}{p}\right]$ **I detta exempel ska p var i enheten bågsekunder**
  Vi vet att p=0,008''
  parsec=407,5 ljusår

- Lösningsförslag 2 $\left[r = \frac{1}{\sin(p)}\right]$ (vinkel i rad) **I detta exempel ska p var i enheten radianer**
  Vi vet att p=0,008''
  $$0{,}008'' = 3{,}8785 \cdot 10^{-8} rad$$
  AU = 408,0 ljusår

- Lösningsförslag 3 $\left[r = \frac{1}{\sin(p)}\right]$ (vinkel i grader) **I detta exempel ska p var i enheten grader**
  Vi vet att p=0,008''
  0,008''$= 2{,}2222 \cdot 10^{-6}\ grad$
  AU=408,0 ljusår

OBS: vid användning av $r = \frac{1}{\sin(p)}$, ska p omvandlas till enheten rad eller grad.

Exemplet löstes på olika sätt så att läraren kan välja det lösningsförslag som passar eleverna bäst. Helt enkelt blir det enklare för dig som lärare att anpassa materialet till just den mattekurs du undervisar i.

Hur vinklarna kan mätas i verklighet

Eftersom parallaxvinklar är mycket små är de svåra att mäta direkt. I praktiken bestäms de därför indirekt genom observationer.

Man tar exempelvis två bilder av en närliggande stjärna med cirka sex månaders mellanrum. Under denna tid har jorden förflyttat sig till motsatta sidor av sin bana runt solen, vilket skapar en baslinje.

På grund av denna baslinje uppvisar stjärnan en liten skenbar förskjutning i förhållande till bakgrundsstjärnorna. Denna förskjutning är för liten för att kunna uppfattas med blotta ögat. I praktiken används därför avancerade teleskop, kameror och analysprogram som kan mäta mycket små förändringar i bildpositioner. Genom att analysera hur många pixlar stjärnan har förflyttat sig mellan bilderna, och med kunskap om hur stor vinkel varje pixel motsvarar, kan förskjutningen omvandlas till en vinkel i bågsekunder

Lektionsplanering

Här nedan följer ett exempel på en lektionsplanering om parallaxer. Alla tiderna som anges är exempel och de bör anpassas av läraren som håller i lektionen. Exemplet nedan är anpassat för en lektion som är 1 h långt men detta kan ändras beroende på hur lång era mattelektioner är. Lektionen kommer bland annat att följa EPA (enskilt, par och alla).

Början av lektionen (0–10 min)

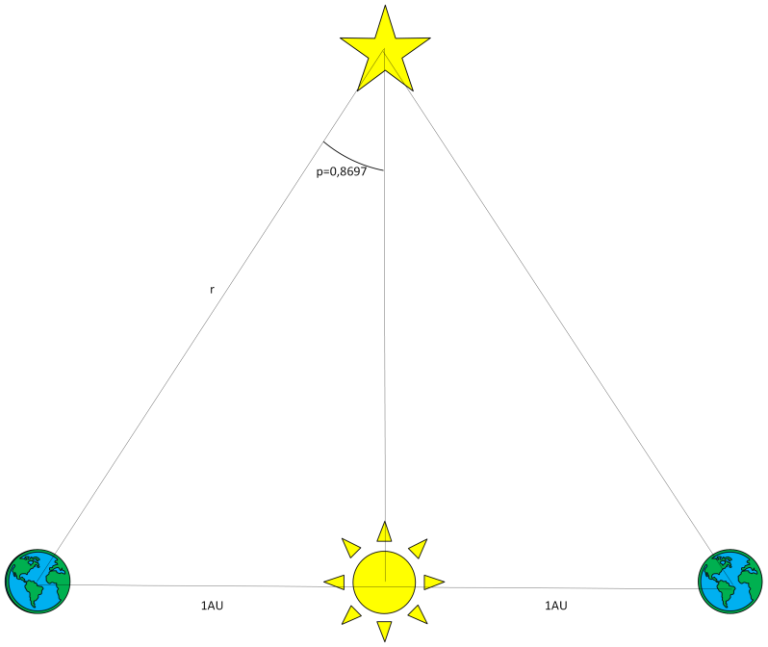
I början av lektionen ska läraren gå igenom vad en parallax är för något och även förklara hur man kan beräkna avståndet till en stjärna med hjälp av geometri (parallaxmetoden). Läraren ritar upp en skiss liknande Figur 3 på tavlan och tillsammans med eleverna härleder fram formeln sin(p)=1/r. Läraren bör även ta upp lärandemålen.

Aktivitet 1: Enskilt arbete med en enklare uppgift (5–15 min)

Eleverna får en uppgift om att beräkna avståndet och därefter får de ca 5 minuter på sig att räkna avståndet. Därefter görs det en snabb genomgång av frågan för att se till att eleverna har förstått konceptet. Detta är den enskilda delen av EPA- modellen.

En stjärna har parallaxen 0,7689 bågsekunder och avståndet mellan solen och jorden är 1AU:

a) Beräkna avståndet till stjärnan via parallaxmetoden. Skriv avståndet i ljusår.
b) Sök på Google vilken stjärna du har fått fram. Gå sedan in i hemsidan https://stellarium-web.org/ och sök upp stjärnan och se om ditt avstånd som du har räknat fram är samma avstånd som hemsidans.



Figur 4: Bild över parallaxen för frågan (bilden är ritad av författarna)

Aktivitet 2: Arbete i par och sedan i helklass (20–30 min)

Eleverna får först arbeta i par. De ska gå in i hemsidan https://stellarium-web.org/ och välja en stjärna från listan nedan. Sedan klickar de på stjärnan för att få fram avståndet från stjärnan till jorden. Därefter ska de räkna ut vinkeln genom att lösa ut variabel p från de formler de har lärt sig (ca 15–20 min).

Beskrivning av uppgift inför par-arbetet:

- Välj en stjärna från listan
- Gå in i stellarium och hitta stjärnan och dess avstånd till jorden.
- Rita en ungefärlig skiss över hur parallaxen kan se ut.
- Räkna ut vinkeln.

Därefter sker en diskussion i helklass om hur de har hittat vinkeln. Du kan även ställa dessa frågor men självklart får ni lägga till frågor (ca 10–15 min):

- Varför är parallaxer viktiga?
- Tror ni att parallaxmetoden alltid fungerar när man ska beräkna avståndet till en stjärna.
- Jämför approximationen r=1/p med r=1/sin(p). Varför skiljer sig svaret? Resonera även över modellernas begräsningar.

Denna del av lektionen utgör par och alla delen av EPA.

Avslut: (ca 5 min)

Knyt ihop säcken och avsluta lektionen. Exempelvis kan man sammanfatta kort vad som har gjorts under lektionen och förklara hur geometri kan användas i verkligheten.

Lista över stjärnor:

- 61 Cyg A
- 61 Cyg B
- Sirius
- Betelgeuse
- Rigel
- Polaris
- Vega
- Deneb
- Altair
- Arcturus
- Capella
- Antares

Lösningsförslag:

Aktivitet 1

a)

Lösningsförslag 1: **I detta exempel ska p var i enheten bågsekunder**

$$r = \frac{1}{p}$$

Insättning av p=0,7689''

$$r = \frac{1}{0{,}7689} = 1{,}30055924\ parsec = 1{,}30055924 \cdot 3{,}26\ ljusår = 4{,}2398\ ljusår$$
$$\approx 4{,}24\ ljusår$$

Lösningsförslag 2 (vinkel i rad): **I detta exempel ska p var i enheten radianer**

$$r = \frac{1}{\sin(p)}$$

$p = 0{,}7689'' = 3{,}72773 \cdot 10^{-6}$ rad

Insättning av $p = 3{,}72773 \cdot 10^{-6}$ rad

$$r = \frac{1}{\sin(3{,}72773 \cdot 10^{-6})} = 268259{,}6\ AU = 268259{,}6 \cdot \frac{3{,}26}{2{,}06 \cdot 10^{5}}\ ljusår = 4{,}2452\ ljusår$$
$$\approx 4{,}25\ ljusår$$

Lösningsförslag 3 (vinkel i grad): **I detta exempel ska p var i enheten grader**

$$r = \frac{1}{\sin(p)}$$

p=0,7689''$= 2{,}1358 \cdot 10^{-4} grad$

Insättning av $p = 2{,}1358 \cdot 10^{-4} grad$

$$r = \frac{1}{\sin(2{,}1358 \cdot 10^{-4})} = 268259{,}6\ AU = 268259{,}6 \cdot \frac{3{,}26}{2{,}06 \cdot 10^{5}}\ ljusår = 4{,}2452\ ljusår$$
$$\approx 4{,}25\ ljusår$$

b) Stjärnan är Proxima centauri som är 4,24 ljusår ifrån jorden.

Aktivitet 2

Steg 1: Omvandla ljusår till parsec

Steg 2: Sätt in avståndet (r) i formeln sinp=1/r och beräkna p.

Diskussion frågor

- Varför är parallaxer viktiga?
  Det gör det möjligt att mäta avstånd till stjärnor.
  Utan parallaxer skulle vi inte veta hur långt bort stjärnor faktiskt är, bara hur ljusstarka de ser ut.
- Tror ni att parallaxmetoden alltid fungerar när man ska beräkna avståndet till en stjärna.
  Nej, det fungerar inte alltid.
  För stjärnor som är för långt bort blir parallaxvinkeln så liten att den inte går att mäta noggrant.
  Mätfel blir för stora när vinkeln är extrem liten.
  Därför måste astronomer använda andra metoder för mycket avlägsna stjärnor och galaxer.
  Parallax fungerar bäst för relativt närliggande stjärnor.
- Jämförelsen kan vara att de använder sig av båda formlerna för att beräkna avståndet/vinkeln och sedan jämför svaret.
  Avvikelser uppstår på grund av den approximerade formeln och de approximationer som görs på vägen till formeln.